Hénon map の構造と分岐について

三波　篤郎　（北見工大）

Hénon map（あるいは Hénon family）とは，次のような $\mathbf{R}^2$ あるいは $\mathbf{C}^2$ 上の２次多項式で表わされる写像の 2–parameter family のことである．

$$H_{a,b}(x,y)=(by+a-x^2,x).$$

Jacobian は constant に $-b$ であり，$b\neq 0$ ならば $H_{a,b}$ は diffeomorphism である．Affine map による座標変換によって，これは次のような形にすることもできる．

$$(y+1-ax^2,bx),\qquad (y,a-y^2-\delta x).$$

この Hénon map に関してまず重要なことは，この写像は見かけほど特殊なものではないということである．すなわち簡単な計算から，２次多項式で表わされる $\mathbf{R}^2$ または $\mathbf{C}^2$ からそれ自身への写像で，Jacobian が constant なものは，affine map による座標変換によって，Hénon map かまたは次のような写像に変換できることがわかる．

$$F(x,y)=(\alpha x+y^2+\beta,\gamma y+\delta).$$

この形からわかるように，この写像は力学系としては単純なものである．従って Hénon map は、力学系として nontrivial な２次多項式 diffeomorphism の標準形であると言える．

1. Hénon map 研究の motivation.

(１)　その motivation としてはまず第一に，上にも述べたように，Hénon map は最も単純な非線形の diffeomorphism であるということがあげられる．一般の非線形 diffeomorphism の dynamics や分岐は，少なくとも Hénon map のそれを含んでいるように思える．しかしこれももちろん大問題のひとつである．

１次元の２次関数の standard family はある意味で universal family である．すなわち，unimodal map で現われる全ての kneading sequence を持ち，しかもそれらがその sequence の順序通りに単調に出現する．これと類似の性質を Hénon family が持つだろうか？(どうもそうはならないような気がするが...) しかしとにかく２次元以上の写像に対しては，そもそも orbit structure を表現するような topological invariant（１次元写像の kneading sequence に相当するもの）が知られていないので，まずその辺をなんとかしないことには始まらないように思われる．

(２)　次に，Hénon map は horse shoe map の生成過程を含んでいるということである．Devaney–Nitecki は，パラメーター a がある程度大きければ（$a\geq 2(1+|b|)^2$）Hénon map は horse shoe map になり，$a<-(1+|b|)^2/4$ ならば $\Omega(H_{a,b})=\emptyset$ であることを証明している．よく知られているように，homoclinic point があれば，そこには horse shoe map と同型の subsystem が含まれており，更にほとんど全ての nontrivial な non–linear system は homoclinic point を持っている．その意味で，horse shoe map の生成過程は非線形系の分岐に於いて，最も基本的な要素である．

(３)　Hénon map はあるパラメーター領域に於いて Hénon attractor と呼ばれる attractor を持っており，これは dissipative な非線形系で現われる strange attractor の中で最も単純

なものである．平面上の diffeomorphism によって得られる strange attractor の構造やその上の dynamics がどのようなものであるのかというのは基本的な問題のひとつであるが，そのためにまず最も単純と思える Hénon map を対象とするのはきわめて自然だろう．なお，Hńon map に対して，non-trivial attractor の存在が厳密に証明されているのは，$|b|$ が十分に小さい時のみである（ [BC], [MV] ）．

（４）　Quadratic map あるいは unimodal map は，複雑だけれどもきれいな構造と分岐を持っている．Hénon map は b が 0 の時は １次元の quadratic map となるが，この構造や分岐が，２次元の diffeomorphism にどの様に拡張しているのだろうか？　特に，unimodal map においては $*$-product できれいに表現されている renormalization structure が，２次元の diffeomorphism ではどの様に定義可能なのかが興味深い．

（５）　Hénon map は $b=-1$ の時は area preserving map の 1–parameter family となる．特に H は $-1<a<3$ では elliptic な fixed point を持つ．この間この fixed point のまわりでは，Hamiltonian system から得られる写像で見られるような，invariant circle や islands の発生，消滅が起きる．この意味で Hénon map は，area preserving map （あるいは symplectic map ）の分岐の最も単純な paradigm である．

Area preserving map を調べる上で Hénon map に注目する理由としてはさらに，Hénon map は a が大きくなると horse shoe map となること，つまり KAM theoretic なよくわからない分岐が，Bernoulli system という単純なものに関係付けられるのではないか，という淡い期待もある．

2. Topological strucrute of the bifurcation diagram of the Hénon family.

Hénon map のパラメーター空間を数値計算によって調べると，その中に cusp connection と呼ばれる特徴的な構造が存在し，それによって standard な quadratic map のタイプの異なる周期点が、Hénon map のパラメーター空間の中でつながっているという事実が見受けられる．また、その cusp connection と呼ばれる関係には、ある種の規則性が予想される．

[San3], [SS] では，１次元の quadratic map のタイプの異なる周期軌道が，Hénon map のパラメータ空間の中でつなぐことができるためのある十分条件を与えている．その条件は，記号列のある単純な操作で与えられるのもであり，任意に与えられた２つの itinerary がその条件のもとで同値になるかどうかは，簡単に判定できる．この条件は，Hénon map のパラメータ空間において，itinerary を特定できる部分，すなわち，1-dimensional part と hyperbolic part のつながり方を調べることによって得られる．さらに，この条件は極めて自然であるため，必要条件にもなると期待できる．

3. Hyperbolicity in the Hénon family.

ある与えられた写像の周期点の個数を厳密に求めることは，たとえ１次元の２次関数や Hénon map のような，きわめて単純な写像であっても非常に難しい．その方法としてもふつう Newton 法 くらいしか思いつかないわけだが，それでやると周期はせいぜい１０くらいであり，大型計算機などでかなりがんばっても１５くらいが限界と思われる．またそこまでやったとしても Newton 法では，得られた数の確実性に不安が残る．しかし１９８９年頃，Biham と Wenzel という人たちが Hénon map に対してだけではあるが，画期的な方法を発見したのである．それは基本的には Aubry–Mather の Lagrangian というものに基づいており，まず周期 p の周期点がその critical point に１対１に対応しているような $\mathbf{R}^p$ 上のある gradient vector field を定義する．そしてその critical points を全て捜し出す，ということ

を行なうのである．残念ながら，この方法の正当性は数学的には証明されていない．しかしこの方法がうまくゆかない例もまだ見つかってはいないようである．

さて，$b=-1$ (area and orientatin preserving case) の場合に，上記の Biham–Wenzel の方法を使って a を変化させながら周期２０までの周期点の個数を計算して行くと，あるけっこう広い a の区間で，周期点の個数が一定となるものがいくつか存在することがわかる．これはこれらのパラメーター領域で Hénon map が構造安定となることを示しているように見える．構造安定性定理より，それは non-wandering set が hyperbolic set となることを意味する．

[DMS] では数学的に厳密な証明はないものの，その hyperbolicity のメカニズムを説明し，そこから得られるマルコフ分割で計算した周期点の個数と，Biham–Wenzel の方法で計算した個数とが，周期２０まで完全に一致するという結果を得ている（周期２０の周期点の個数は，１００万くらいにもなる）．またここで調べられた３つの hyperbolic case は全て，missing block expression という方法でかなり簡単にその構造を表現できる．この missing block expression は Cvitanović の pruning front のひとつの例とも言えるが，対応する Hénon map の構造を具体的に与えたものとしては，初めてのものである．

4. Dynamics of Complex Hénon maps.

実１次元力学系理論の成功には，同時に１次元複素力学系理論が発展したという事実が大いに関係している．例えば，偶数次 unimodal map の kneading sequence の単調性の証明，あるいは，Sullivan の renormalization theory など，複素力学系理論を駆使して初めて可能になった重要な結果がいくつかある．同様の事が２次元でも成り立つと考えることは自然であろう．

Fornaess–Sibony [FS], Bedford–Smillie [BS1–4] らは，多変数ポテンシャル論を使うことにより，complex Hénon map に関する多くの基本的な性質の証明に成功した．

$$K_\pm = \{p \in \mathbf{C}^2 \;:\; |H^{\pm n}(p)| \text{ is bounded as } n \to \infty\}$$

と定義する．$J_\pm = \partial K_\pm$, $K = K_+ \cap K_-$, $J = J_+ \cap J_-$ とする（J は１次元の時の Julia set に相当する）．彼らの得た結果のいくつかを述べると，

(i) K は perfect set である．

(ii) $K_\pm$, $J_\pm$ は連結である．

(iii) Ω を $int\ K_+$ のある連結成分とすると $\partial\Omega = J_+$ である．

(iv) p を sink, B をその basin とすると $\partial B = J_+$ である．

(v) H が２つ以上の basin component を持てば，J_+ は任意の点で embedded topological manifold とはならない．

(vi) p を saddle とすると，その安定多様体 $W^s(p)$ は J_+ の中で dense である．

(vii) p を sink, B をその basin とする．任意の１次元 algebraic variety $V \subset \mathbf{C}^2$ に対し，$B \cap V \neq \emptyset$ かつ $V \not\subset \overline{B}$ となる．

(viii) J が hyperbolic set ならば，周期点は J で dense である．

[BS1] で注意しているように complex Hénon map は strange attractor を持たない．すなわち attractor は必ず有限個の sink となってしまう．また topological entropy はパラメーターに関係なく常に $log\ 2$ である．このように real と complex ではだいぶ様子が異なる．しかし complex の場合だけとはいえ，Hénon map に対してこれほど強力な理論的枠組みを与えたという意味で，この複素解析的方法ははきわめて重要であろう．

REFERENCES

[B] Bedford E, *Iteration of polynomial automorphisms of* $\mathbf{C}^2$, Proceedings of the ICM Kyoto **1990 II**, 847–858.

[BC] Benedics M, Carleson L, *The dynamics of the Hénon map*, Ann. of Math. **133** (1991), 73–169.

[BS1] Bedford E, Smillie J, *Polynomial diffeomorphisms of* $\mathbf{C}^2$*: currents, equilibrium measure and hyperbolicity*, Inv.Math. **103** (1991), 69–99.

[BS2] Bedford E, Smillie J, *Fatou–Bieberbach domains arising from polynomial automorphisms*, Indiana Univ.Math.J. **40** (1991), 789–792.

[BS3] Bedford E, Smillie J, *Polynomial diffeomorphisms of* $\mathbf{C}^2$*: Stable manifolds and recurrence*, J.A.M.S. **4** (1991), 657–679.

[BS4] Bedford E, Smillie J, *Polynomial diffeomorphisms of* $\mathbf{C}^2$*: Ergodicity, exponents and entropy of the equilibrium measure*, Math.Ann. **294** (1992), 395–420.

[BW] Biham O, Wenzel W, *Characterization of unstable periodic orbits in chaotic attractors and repellors*, Phys Rev Lett. **63** (1989), 819–822.

[DMS] Davis MJ, MacKay RS, Sannami A, *Markov shifts in the Hénon family*, Physica D **52** (1991), 171–178.

[FS] Fornaess JE, Sibony N, *Complex dynamics in higher dimensions*, Complex Potential Theory (1994), Kluwer Academic Publishers, 131–186.

[MV] Mora L, Viana M, *Abundance of strange attractors*, Acta Math. **171** (1993), 1–71.

[San1] Sannami A, *On the structure of the parameter space of the Hénon family*, Dynamical Systems and Applications(ed. N.Aoki), World Scientific (1987), 143–157.

[San2] Sannami A, *A topological classification of the periodic orbits of the Hénon family*, Japan J.Appl.Math. **6,No.2** (1989), 291–330.

[San3] Sannami A, *On the structure of the parameter space of the Hénon map*, Towards the Harnessing of Chaos (ed. M.Yamaguti) (1994), Elsevier Science B.V., 289–303.

[SS] Sannami A, Shibayama K, *On the configuration of the periodic point surfaces of the Hénon family*, in preparation.